Билет №13

1) *Фазовый портрет нелинейных систем.*

Лекции + Теория бифуркаций динамических систем на плоскости, Баутин Н.Н., Леонтович Е.

Будем считать $u(t)=0$

Поведение НЛС всегда зависит от н.у.

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i x(t)}{dt^i} = a_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \dots +$$

$$+ a_1 \dot{x} + a_0 x = 0 \quad (5.1)$$

$$\dot{x} = \underset{n\times n}{A} x \quad (5.2) \quad x - 1\times n - \text{в-р состояний}$$

У НЛС может быть несколько особых точек с разной динамикой и разной устойчивостью. НУ определяют то, ближе к какой из них мы окажемся. Т.е. какая будет влиятельнее, такая и определит динамику.

Геометрическая интерпретация ур-ния (5.1) м.б. дана как семейство кривых в простр-ве размерности n с координатами $\{x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}\}$.

1) n-мерное пр-во – фазовое пространство
2) траектории, явл. решениями (5.1) – фазовые траектории
3) Фазовый портрет – представление фазовых траекторий в фазовом пространстве
4) Изображающая точка – решение (5.1) на фазовой кривой в момент времени t при заданных н.у.

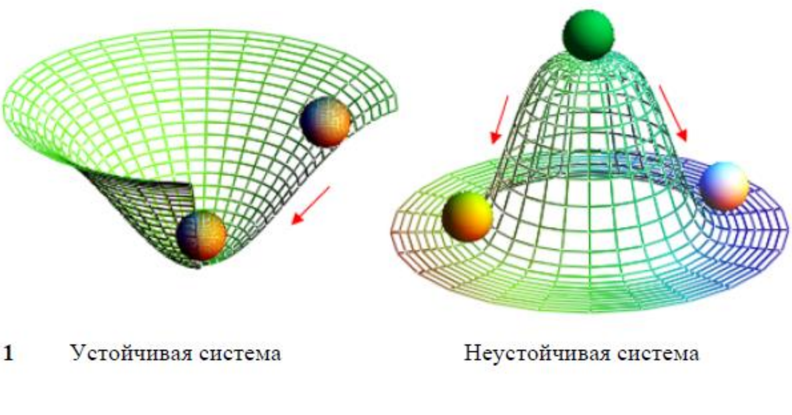


Рис. 1 Устойчивая система Неустойчивая система

Любая электромеханическая система является динамической системой. Элементы, входящие в систему могут быть нелинейными, следовательно, дифференциальные уравнения, описывающие динамические системы являются нелинейными.
Для исследования нелинейных систем и наглядного представления, происходящих в них сложных динамических процессов использует фазовое пространство, в котором строятся фазовые портреты (см. рис. 2). Каждая динамическая система имеет свой фазовый портрет. На фазовом портрете изображаются особые точки – точки положения равновесия, которые помогают, без решения дифференциальных уравнений, предсказать поведение динамической системы. Эти точки равновесия могут быть устойчивыми или
неустойчивыми. Если динамическая система находится в окрестности устойчивой точки равновесия, то малые возмущения не нарушат устойчивой работы системы (см рис). Если точка положения равновесия не устойчива, то возмущения будут прогрессировать что может привести к разрушению системы (см. рис/ 2).

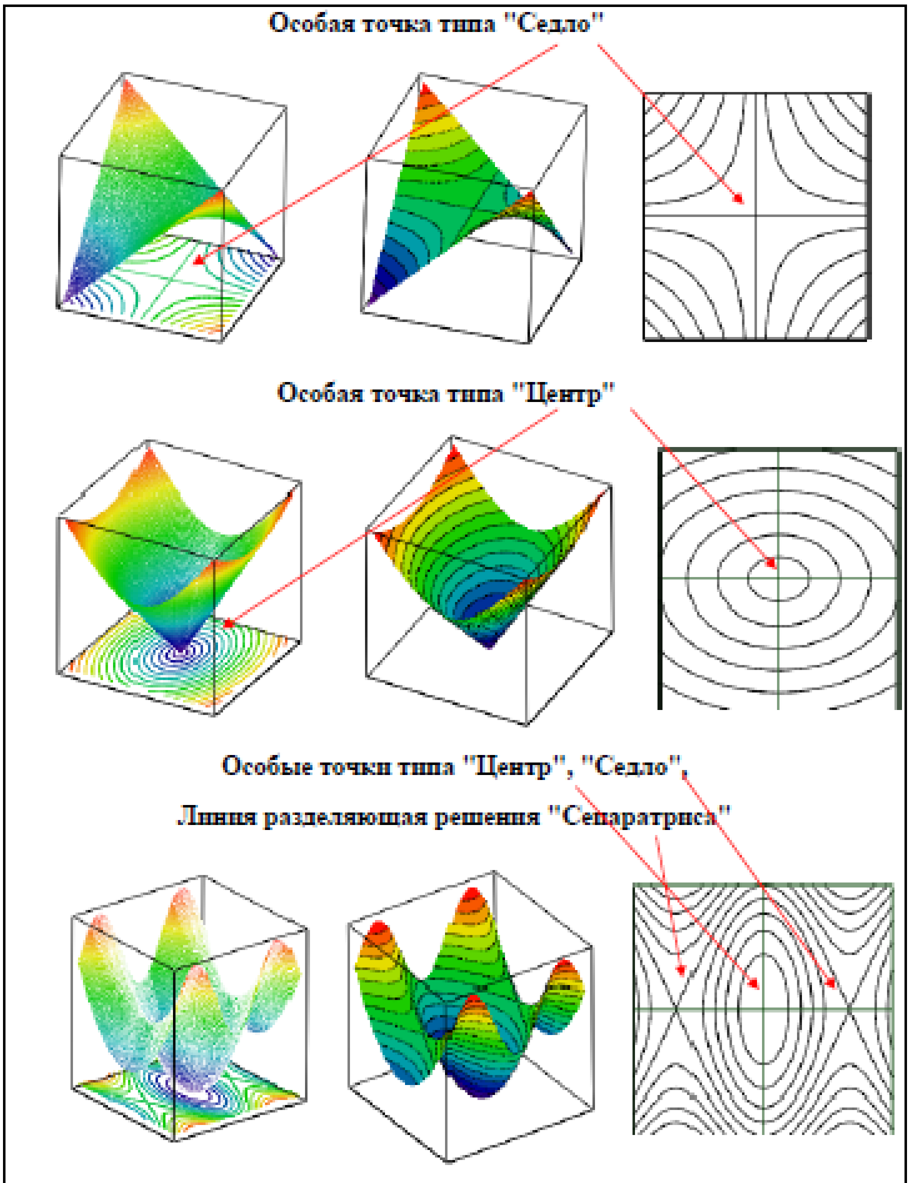


Рис.2. Фазовые портреты динамических систем

Элементы фазовых портретов нелинейных систем:

ПРЕДЕЛЬНЫЙ ЦИКЛ

- изолированная замкнутая траектория в фазовом пространстве динамич. системы, изображающая периодич. движение. В окрестности П. ц. фазовые траектории либо удаляются от него (неустойчивый П. ц.), либо неограниченно приближаются к нему - "наматываются" на него (устойчивый П. ц.). Поведение траекторий в окрестности П. ц. связано со значениями его мультипликаторов (см. Бифуркация). Устойчивый П. ц. является матем. образом периодич. автоколебаний.

СЕПАРАТРИСА

- траектория динамической системы с двумерным фазовым пространством, стремящаясяк седловому состояниюравновесия при времени $t \to \infty$ (устойчивая С.) или при $t \to -\infty$ (неустойчиваяС.). Если С. стремится к седлу при $t \to \pm\infty$,то её (вместе с седлом) называют петлей С.
Надо добавить другое определение сепаратрисы. Тут очень жесткое определение.

2) *Устойчивость по Лагранжу, устойчивость по Пуассону и возвраты по Пуанкаре. Понятие сечения Пуанкаре. Периодические, квазипериодические и хаотические движения. Устойчивость по Ляпунову. Алгоритм вычисления старшего ляпуновского показателя. Карты ляпуновского показателя и их применение к анализу нелинейных систем.*

Устойчивость по Лагранжу, устойчивость по Пуассону и возвраты по Пуанкаре. Понятие сечения Пуанкаре.

Ответ

Показатели Ляпунова.

$D(t) = D(0)e^{\lambda t}$

$$\lambda = \lim_{\substack{D(0)\to 0\\ t\to\infty}} \frac{1}{t}\ln\frac{D(t)}{D(0)}$$

λ - показатель Ляпунова

Для *одномерной* системы:
•λ = 0 - расстояние между точками сохраняется, а система является консервативной.
•λ < 0 - расстояние между точками уменьшается, а аттрактором могут быть только неподвижные точки. Иначе пишут λ = (-)
•λ > 0 - расстояние между точками экспоненциально увеличивается, траектории стремятся к бесконечности. λ = (+).

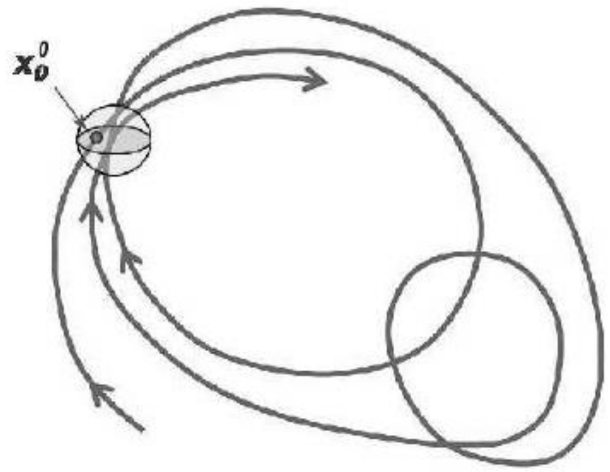
В двумерной системе возможные аттракторы - точки и предельные циклы:
(λ1; λ2) = (- ; -) аттрактор - устойчивая стационарная точка (фокус или узел);
(λ1; λ2) = (- ; 0) аттрактор - предельный цикл.

В трехмерной системе возможные аттракторы - точки, предельные циклы, инвариантные торы, странные аттракторы:
(λ1; λ2; λ3) = (- ; - ; -) аттрактор - фокус или узел);
(λ1; λ2; λ3) = (0 ; - ; -) аттрактор - предельный цикл;
(λ1; λ2; λ3) = (0 ; 0 ; -) аттрактор - устойчивый инвариантный тор;
(λ1; λ2; λ3) = (+ ; 0 ; -) странный аттрактор.

Устойчивость по Пуассону означает, что через некоторое время фазовая траектория возвращается в сколь угодно малую окрестность начальной точки.

Интервал времени, по прошествии которого траектория возвращается в окрестность точки $\boldsymbol{x}_0^0$ заданного радиуса ε, называется *периодом возврата Пуанкаре*.

Любой установившийся режим колебаний нелинейных диссипативных систем представляется траекториями, устойчивыми по Пуассону. Это относится и к динамическому хаосу, связанному с существованием странного аттрактора – режиму, который можно считать установившимся в смысле постоянства во времени его усредненных статистических характеристик.

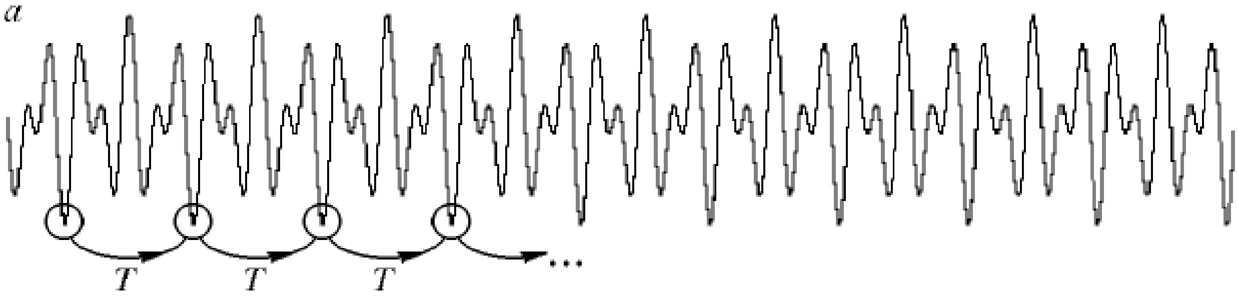


Точка фазового пространства $\mathbf{y}$ называется *ω-предельной точкой* фазовой траектории $\mathbf{x}(t)$, если можно указать такую последовательность моментов времени $t_k \to \infty$, что $\lim\limits_{k\to\infty} \mathbf{x}(t_k) = \mathbf{y}$. Аналогично, точка $\mathbf{z}$ называется *α-предельной точкой*, если можно указать такую последовательность моментов времени $t_k \to -\infty$, что $\lim\limits_{k\to\infty} \mathbf{x}(t_k) = \mathbf{z}$. Множество всех ω-предельных точек называется ω-предельным множеством данной траектории $\Omega_{\mathbf{x}}$, а множество всех α-предельных точек — α-предельным множеством $\mathrm{A}_{\mathbf{x}}$. Траектория $\mathbf{x}(t)$ называется *устойчивой по Пуассону*, если каждая ее точка является α-предельной и ω-предельной, т. е. $\mathbf{x}(t) \in \Omega_{\mathbf{x}} \cap \mathrm{A}_{\mathbf{x}}$.

Устойчивость по Пуассону является важным, но слабым свойством устойчивости. Мы ничего не можем сказать о поведении соседних траекторий, изначально близких к начальной точке – притягиваются ли они к исходной траектории или уходят от нее.

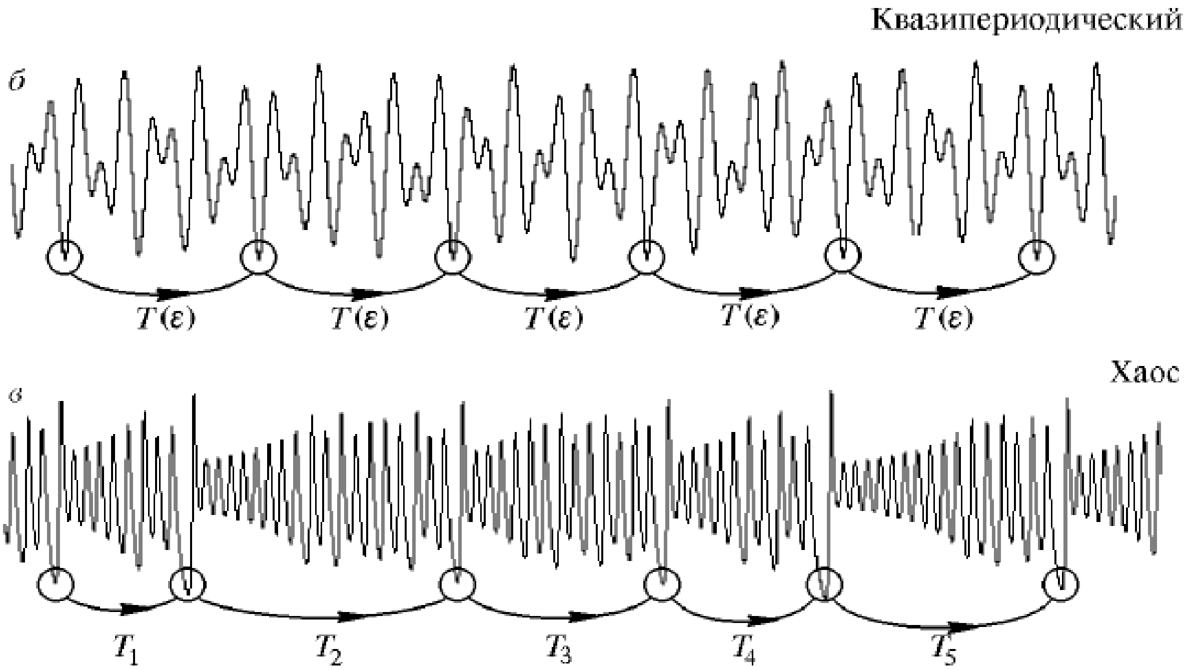
Примеры. Состояние равновесия. Ему отвечает фазовая траектория, состоящая из одной точки, и она, очевидно, устойчива по Пуассону.

Рассмотрим замкнутую траекторию – предельный цикл. Возвраты Пуанкаре будут фиксироваться периодически со сколь угодно высокой точностью. Время возврата T есть просто период цикла и оно не зависит от выбора ε, по крайней мере, когда ε становится достаточно малым.



Предположим, что для любого заданного ε можно указать период возврата $T(\varepsilon)$, один и тот же для любой точки старта на данной траектории, причем при $\varepsilon \to 0$ этот период стремится к бесконечности. Иными словами, возвраты с данной степенью точности следуют друг за другом регулярно, с правильной периодичностью, но период увеличивается, если мы ходим увеличить точность сравнения состояний. Такие движения называют *квазипериодическими.* В фазовом пространстве этому типу динамики отвечает траектория, плотно покрывающая поверхность тора.

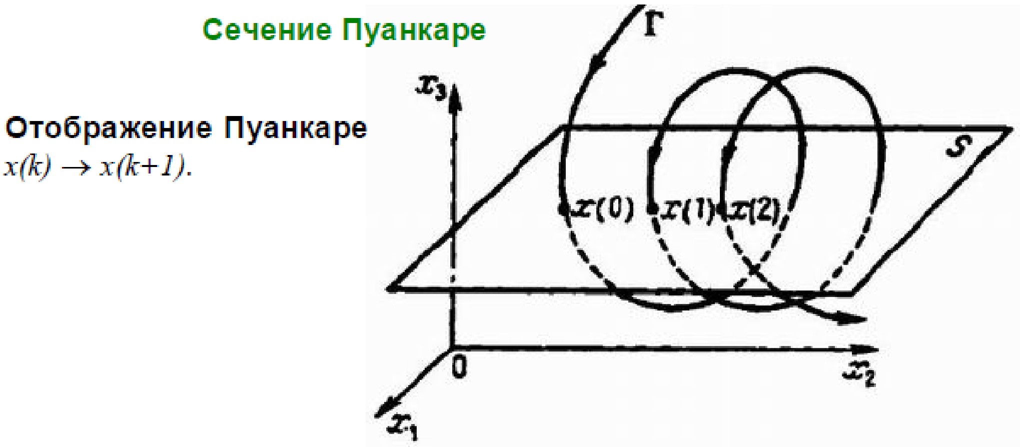
Динамический хаос – это такая ситуация, когда возвраты Пуанкаре в ε-окрестность стартовой точки не проявляют регулярности, интервал времени между двумя последовательными возвратами оказывается каждый раз другим и возникает некоторое статистическое распределение времен возврата.

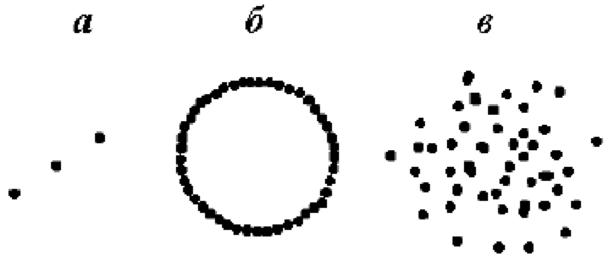


9.1. Устойчивость по Лагранжу

Точка $\mathbf{x}_0$, а также исходящая из нее фазовая траектория $\mathbf{x}(t)$ называются *устойчивыми по Лагранжу*, если состояние $\mathbf{x}(t)$ всегда, при всех $t > 0$, остается в некоторой ограниченной области фазового пространства. Иначе говоря, существует такая константа R, что для всех $t > 0$ имеем $\|\mathbf{x}(t)\| < R$. (Запись $\|\mathbf{x}(t)\|$ будет в нашем изложении обозначать, как правило, обычную евклидову норму: $\|\mathbf{x}(t)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_N^2}$, где x_1, x_2, ..., x_N — компоненты вектора $\mathbf{x}$.)

Когда в лекции 4 мы показали, что аттрактор Лоренца располагается в ограниченной области фазового пространства, мы доказали тем самым устойчивость множества траекторий системы Лоренца по Лагранжу.





Вид сечений Пуанкаре для
а) периодического; (б) квазипериодического; (в) хаотического процессов.

Периодические, квазипериодические и хаотические движения. Устойчивость по Ляпунову.

Формулировка понятия устойчивости по Ляпунову. Невозмущенное движение (установившийся процесс) называется устойчивым, если при заданной сколь угодно малой области в (рис. 16.7, б) можно найти такую область г), что при начальных условиях, расположенных внутри этой области, возмущенное движение (переходный процесс) будет таким, что изображающая точка не выйдет из области в при любом сколь угодно большом значении времени *t* (см. § 6.1).
В аналитической записи формулировка понятия устойчивости но Ляпунову будет следующей. Невозмущенное движение (установившийся процесс) будет устойчивым, если при заданных

положительных сколь угодно малых числах в, можно найти такие положительные числа η_i (i = 1,..., n), что при начальных условиях

$$|x_{i0}| < \eta_i \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

решение дифференциальных уравнении возмущенного движения (переходного процесса) удовлетворяет неравенствам

$$|x_i(t)| < \varepsilon_i \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

при любом сколь угодно большом t, начиная с некоторого $t = T > 0$.

Алгоритм вычисления старшего ляпуновского показателя. Карты ляпуновского показателя и их применение к анализу нелинейных систем?

Как в d-разбиении определить область устойчивости относительно вариации некторых параметров. Ляпуновские показатели меняются и поэтому меняется устойчивость системы.

Старший показатель α_1 может быть приближенно вычислен и без построения фундаментальных решений уравнений в вариациях

$$\alpha_1 = \frac{1}{t} \ln \frac{\|x(t) - x(t)\|}{\epsilon}, \qquad (13.35)$$

где $x(t)$ решение (13.27) с начальным условием $x(0)$, $\|x(0) - x(0)\| = \epsilon$, причем t достаточно велико, а $\epsilon > 0$ достаточно мало. Для повышения точности расчета можно вычислять среднее правых частей (13.35) при разных начальных условиях x_0, взятых на траектории $x(t)$. Тогда t необязательно брать очень большим [68].

Показатели Ляпунова характеризуют прогнозируемость траекторий системы. Действительно, траектория $x(t)$ аппроксимируется через время T другой траекторией с погрешностью Δ, если

$$T \leq \frac{1}{\alpha_1} \ln \frac{\Delta}{\epsilon}, \qquad (13.36)$$

где ϵ начальная погрешность. Следовательно, хаотическую